Patryk Pagacz

Niezmienniki i kontrolowane funkcje na użytek zadań kombinatorycznych.

Jagiellońskie Warsztaty Olimpijskie

W tym opracowaniu skupimy się na zaprezentowaniu kilku kombinatorycznych problemów. W tego typu zadaniach nieocenione są eksperymenty na małych wartościach, obserwacja tego co może się powtarzać, aż w końcu jak zwykle... intuicja. Większość zaprezentowanych rozwiązań będzie opierać się na odnalezieniu niezmiennika, czyli ujęciu w formie jakiegoś obiektu tej powtarzającej się własności dla danego problemu. W dalszej części zobaczymy, że przydatne są również obiekty, które zmieniają się, ale w sposób, który łatwo możemy opanować (np. monotoniczność).

Zadanie 1. *Czy można wypełnić prostokąt o wymiarach* 8×9 *klockami o wymiarach* 2×2*?*

Dowód. Ponumerujmy kwadraciki danego prostokąta w naturalny sposób przy pomocy par liczb $\{1,2,\dots,8\}\times\{1,2,\dots,9\}$. Teraz pokolorujmy małe kwadraty o współrzędnych $\{1,3,5,7\}\times\{1,3,5,7,9\}$. Zauważmy, że jeśli uda nam się wypełnić dany prostokąt, to każdy klocek o wymiarach 2×2 zajmie dokładnie jedno pokolorowane pole. Pokolorowanych pól jest 20, co prowadzi do sprzeczności, gdyż musiałoby być wtedy 20 klocków, a więc zajmowałyby one powierzchnie 80 pól, podczas gdy $8\cdot 9=72$. □

Zadanie 2. *W każdym kwadracie szachownicy jest zapisana liczba naturalna. Dozwolonym ruchem jest dodanie pewniej liczby całkowitej do każdej z dwóch sąsiadujących liczb w taki sposób, aby uzyskać liczby nieujemne (dwa kwadraty sąsiadują, jeśli mają wspólny bok). Znajdź warunek konieczny i wystarczający, aby wszystkie liczby mogły być równe zero po skończonej liczbie operacji.*

Dowód. Zauważ, że w każdym ruchu dodajemy tę samą liczbę do dwóch kwadratów, z których jeden jest biały, a jeden jest czarny (jeśli szachownica jest naprzemiennie czarno-biała). Jeśli S_b i S_c oznaczają sumę liczb odpowiednio na czarno-białych kwadratach, to S_b-S_c jest niezmiennikiem. Zatem jeśli wszystkie liczby po skończonej liczbie kroków wynoszą 0, to w każdym momencie mamy $S_b-S_c=0$. Jest to zatem warunek konieczny.

Dowiedźmy, że jest on również wystarczający. Załóżmy, że a,b,c są liczbami odpowiednio w kratkach A,B,C, gdzie A,B,C są kwadratami takimi, że A i C sąsiadują z B. Jeśli $a\leqslant b$, możemy dodać $-a$ do obu a i b. Jeśli $a\geqslant b$, to możemy dodać $(a-b)$ do b i c. Nstępnie, możemy dodać $(-a)$ do liczb w kwadratach A i B. W wyniku tych operacji otrzymamy 0 w kwadracie A. Jako że możemy wszystkie kwadraty na szachownicy ponumerować w taki sposób, aby kolejne kwadraty były swoimi sąsiadami, mamy algorytm zerowania wszystkich kwadratów oprócz ew. dwóch ostatnich. Jeśli liczby na szachownicy spełniały warunek $S_b-S_c=0$, to te dwie liczby są sobie równe, a więc można wyzerować całą szachownicę. □

Zadanie 3. *Gra w kamyki jest rozgrywana w następujący sposób. Początkowo jeden kamyk znajduje się w punktcie* $(0,0)$*. Ruch polega na usunięciu kamyka z punktu*

(i,j) i umieszeczniu po jednym kamyku w punkcie $(i+1,j)$ i $(i,j+1)$, pod warunkiem, że punkt (i,j) miałkamyk na początku, a punkty $(i+1,j)$,$(i,j+1)$ nie miały kamieni. Udowodnić, że w dowolnym momencie gry w którymś z punktów kratowych (a,b) takim, że $a+b \leqslant 3$ będzie znajdowałsię kamyk.

Dowód. W każdym ustawieniu przypiszmy każdemu kamykowi wagę $2^{-(i+j)}$, gdzie (i,j) jest pozycją owego kamyka. W każdym ruchu usunięty kamyk zostanie zastąpiony przez dwa kamyki, z których każdy ma połowę swojej wagi. Tak, więc całkowita waga kamyków jest niezmienna i wynosi tyle ile początkowa waga tj. $2^0 = 1$.

Nie wprost. Załóżmy, że na pewnym etapie żaden kamyk nie znajduje się w punkcie (a,b), gdzie $a+b \leqslant 3$. Następnie maksymalna możliwa całkowita waga wszystkich kamyków to waga całej pierwszej ćwiartki minus waga kwadratów (a,b), gdzie $a+b \leqslant 3$, która wynosi

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} 2^{-i-j} - 2^0 - 2\cdot 2^{-1} - 3\cdot 2^{-2} - 4\cdot 2^{-3} = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} - 1 - 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Skoro ta wartość jest różna od 1 otrzymujemy sprzeczność. □

Zadanie 4. *Rozważmy n kartoników. Każdy z nich ma jedną stroną białą, a drugą czarną. Niech będą one poukładane w rzędzie tak, aby ich białe strony były widoczne. W każdym kroku, jeśli to możliwe, wybieramy dostępny kartonik odwrócony białą stroną do góry (oprócz dwóch najbardziej zewnętrznych kartoników), usuwamy go i odwracamy najbliższe kartoniki z lewej i prawej strony. Udowodnijmy, że można osiągnąć stan, w którym pozostały tylko dwa kartoniki, jeśli i tylko wtedy, gdy $n-1$ nie jest podzielny przez 3.*

Dowód. Wykazanie, że dla $n = 5,6$ można osiągnąć żądany stan oraz uogólnienie tych przypadków do dowolnego n takiego, że $3 \nmid n-1$ pozostawiam do samodzielnego przemyślenia.

Zastanówmy się nad przypadkiem $3|n-1$. Każdemu kartonikowi odwróconemu kolorem białym (B) do góry przypiszmy pewną liczbę dodatnią (etykietę). Jeśli biały kartonik ma po lewej stronie t czarnych markerów (C), przypisujemy mu liczbę $(-1)^t$. Niech S będzie sumą wszystkich tak przypisanych liczb. Początkowo wszystkie etykiety mają wartość $(-1)^0 = 1$, więc $S = n$. Etykiety mogą ciągle się zmieniać, ale pokażmy, że liczba S pozostaje niezmienna mod 3. Na przykład, załóżmy, że mamy sytuację ...BBC... i usuwamy środkowy biały kartonik. Wtedy otrzymamy ...CB... Jeśli 2 białe kartoniki miały początkowo t czarne kartoniki po lewej stronie, to teraz biały kartonik ma $(t+1)$ czarne kartoniki po swojej lewej stronie. Tak więc oba białe kartoniki miały początkowo etykiety $(-1)^t$, ale teraz biały kartonik ma etykietę $(-1)^{t+1}$. Suma etykiet zmieniła się o $(-1)^{t+1} - 2(-1)^t = 3(-1)^{t+1} \equiv 0 \mod 3$. Podobnie w pozostałych przypadkach (BBB, CBC, CBB) również suma etykiet S nie zmienia się mod 3.

Ostatecznie, jeśli pozostaną dwa kartoniki, to będą one albo białe, albo czarne (liczba czarnych znaczników musi być parzysta - dlaczego?). W pierwszym przypadku obie etykiety są równe 1 i $S = 2$, w drugim $S = 0$, ponieważ żaden kartonik nie ma przypisanej etykiety. Zatem $S = 0$ lub 2 na końcu oraz $S = n$ na początku. Ponieważ suma S pozostaje niezmiennicza mod 3, to $n \equiv 0$ lub 2 mod 3. □

Kolejną metodą często przydatną w zadaniach na kombinowanie jest powiązanie treści zadania z pewną funkcją, a następnie kontrola nad jej zmianą (np. informacja o jej monotoniczności).

Zadanie 5. *W pewnej szkole podczas matury stoliki uczniów są poustawiane równomiernie na planie kwadratu o bokach długości n. Na maturę przyszło $n-1$ chorych uczniów. Co sekundę każdy zdrowy uczeń zostaje zainfekowany, jeśli co najmniej dwóch jego sąsiadów jest chorych. Przy czym za sąsiada uważamy osobę siedzącą z przodu, z tyłu, na prawo lub na lewo. Czy pod koniec egzaminu wszyscy będą chorzy?*

Dowód. Wyobraźmy sobie, że na obwodzie kwadratu posadzimy dodatkowo $4n + 4$ uczniów ubranych w skafandry kosmonauty, a więc uodpornionych na chorobę (zawsze będą zdrowi).

Niech S oznacza liczbę (nieuporządkowanych) par sąsiadów, składających się z ucznia chorego i zdrowego. Jeśli osoba zdrowa miała dwóch, trzech lub czterech chorych sąsiadów, to w kolejnej sekundzie liczba wyżej wspomnianych par, do których należy ta osoba, pozostanie taka sama lub zmieniejszy się (o 2 lub 4).

Na początku $S \leqslant 4\cdot(n-1)$. W kolejnych sekundach liczba ta będzie mniejsza bądź równa wyjściowej wartości, a więc i mniejsza bądź równa $4(n-1)$. Gdyby zdarzyło się, że cała sala zachoruje, mielibyśmy $S = 4n$. Tak, więc niektórzy uczniowie zachowają zdrowie pomimo matury. □

Zadanie 6. *Na okręgu umieszczono $2n+1$ lamp. Każdego dnia niektóre lampy zmieniają stan (z włączonego na wyłączony lub z wyłączonego na włączony), zgodnie z poniższymi zasadami. Jeżeli lampa znajduje się w tym samym stanie co przynajmniej jedna z sąsiednich, to następnego dnia nie zmieni stanu. Jeśli lampa znajduje się w innym stanie niż obu sąsiadów, to następnego dnia zmieni swój stan. Pokaż, że niezależnie od początkowych stanów każdej z lamp, po pewnym czasie żadna z nich nie zmieni stanu.*

Dowód. Nazwijmy lampę "dobrą", jeśli jest w tym samym stanie, co przynajmniej jeden z jej sąsiadów. Gdy lampa jest dobra, pozostanie dobra na zawsze (jeśli dwie sąsiadujące ze sobą lampy są w tym samym stanie, nie zmienią stanu następnego dnia, a więc obie pozostaną dobre). Dlatego też liczba dobrych lamp nigdy nie maleje.

Pokażmy, że w rzeczywistości liczba dobrych lamp ściśle rośnie, aż osiągnie $2n+1$. Początkowo muszą istnieć 2 sąsiednie lampy o tym samym stanie, ponieważ liczba lamp jest nieparzysta. Załóżmy, że w pewnym momencie jest j lamp dobrych i $2 \leqslant j < 2n + 1$. Muszą istnieć dwie sąsiadujące lampy, tak aby jedna była zła, a druga dobra. Zatem zła lampa przełączy się następnego dnia, a dobra lampa pozostanie w tym samym stanie. Wtedy zła lampa stanie się dobra, więc liczba dobrych lamp wzrośnie (należy pamiętać, że wszystkie dobre lampy pozostają dobre). Tak, więc liczba dobrych lamp wzrasta, aż wszystkie lampy będą dobre, i w tym momencie nie będzie już żadnych zmian stanu. □

Zadanie 7. *Nieuporządkowana półka na książki zawiera n tomów, oznaczonych od 1 do n. Bibliotekarz chce je uporządkować w następujący sposób. Wybiera on tom o pewnym numerze k, który jest zbyt daleko w prawo (na pozycji co najmniej $k+1$), wyjmuje go i wstawia w pozycję k-tą. Na przykład, jeśli półka zawiera tomy $3, 1, 4, 2$ w tej kolejności, bibliotekarz może wyjąć tom 2 i umieścić go na drugiej* *pozycji. Książki będą wtedy w kolejności* $3, 2, 1, 4$. *Pokaż, że tym sposobem sekwencja* $(1, 2, ..., n)$ *jest osiągana w mniej niż* 2^n *ruchach.*

Dowód. Ograniczmy ile razy książka o numerze k może być wybrana przez bibliotekarza. Oczywiście, książka n nigdy nie może być wybrana, ponieważ nigdy nie będzie zbyt daleko w prawo. Książka 1 może być wybrana tylko raz, ponieważ raz wybrana, przesunie się na pierwszą pozycję i nigdy więcej się nie przesunie. Książka 2 może być wybrana dwa razy: może być wybrana raz i umieszczona we właściwej pozycji, ale wtedy może się przesunąć z powodu książki 1.

Ogólnie, niech $f(k)$ oznacza ilość razy, kiedy książka k jest wybierana dla $1 \leqslant k \leqslant (n-1)$. Mamy $f(k) \leqslant 1 + f(k-1) + f(k-2) + \cdots + f(1)$. Dzieje się tak dlatego, że gdy k jest w prawidłowej pozycji, może być przemieszczona tylko $f(k-1) + f(k-2) + \cdots + f(1)$ razy, ponieważ jedynym sposobem, w jaki książka k może być przemieszczona, jest "popchnięcie" jej przez książkę o mniejszym numerze.

Używając więc tego rekurencyjnego przepisu na $f(k)$ i faktu, że $f(1) = 1$, otrzymujemy przez prostą indukcję $f(k) \leqslant 2^{k-1}$. Stąd całkowita liczba wymaganych ruchów wynosi co najwyżej $f(1) + f(2) + ... + f(n-1) \leqslant 1 + 2 + 4 + ... + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1$. □

Literatura

[1] Arthur Engel, *Problem Books in Mathematics: Problem-Solving Strategies*, Springer 1997

[2] Pranav A. Sriram , *Olympiad Combinatorics*, 2014

[3] Marcin Pitera, *Kolorowe Kwadraty*, Omega 2006