MATERIAŁY DO JAGIELLOŃSKICH WARSZTATÓW OLIMPIJSKICH
ZASADA SZUFLADKOWA DIRICHLETA

Kraków, 3 marca 2018

Leszek Pieniążek
(Leszek.Pieniazek@im.uj.edu.pl)

1. SFORMUŁOWANIE

Twierdzenie 1 (Wersja podstawowa). *Jeśli zbiór X jest sumą n zbiorów X_i $(i = 1, \dots, n)$ i zawiera więcej niż kn elementów, to przynajmniej jeden ze zbiorów X_i ma więcej niż k elementów.*

2. ZADANIA

2.1. Zadania kombinatoryczne.

Zadanie 1. *Pokazać, że w każdej grupie osób (zawierającej co najmniej 2 osoby) są dwie mające tę samą liczbę znajomych. Zakładamy, że jeśli A jest znajomym B, to B jest znajomym A.*

Szkic. Niech n będzie liczbą osób w grupie. Każdy może mieć od 0 do $n-1$ znajomych, przy czym nie może równocześnie istnieć osoba bez znajomych i inna znająca wszystkich. Zatem liczba znajomych może przyjmować jedynie $n-1$ wartości, a wszystkich ludzi jest n.

Zadanie 2. *Ile maksymalnie gońców można rozmieścić na szachownicy w ten sposób, że żadne dwa się nie atakują?*

Szkic. 14. Można znaleźć 14 przekątnych pokrywających całą szachownicę: po 7 każdego koloru. Jeżeli ustawimy więcej niż 14 gońców, to pewne 2 znajdą się na tej samej przekątnej, czyli się atakują. Istnieje układ nieatakujących się wzajemnie po 7 gońców na dwóch przeciwległych brzegach szachownicy.

2.2. Zadania arytmetyczne.

Zadanie 3. *Pokazać, że jeśli ze zbioru liczb całkowitych $A = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ wybierzemy $n+1$, to znajdziemy wśród nich przynajmniej dwie takie a i b, że $a|b$. Czy można pokazać podobny wynik dla podzbiorów A mniejszej liczebności?*

Szkic. Definiujemy n rozłącznych zbiorów $S_k = \{(2k-1)\cdot 2^i \leqslant 2n\}$ (dla $k \leqslant n$) pokrywające cały A. Z zasady szufladkowej, dla dowolnych $n+1$ liczb pewne dwie są w tym samym zbiorze S_k, a więc jedna jest dzielnikiem drugiej. Wyniku nie da się poprawić, co pokazuje wybór n-elementowego zbioru $\{n+1, n+2, \dots, 2n\} \subset A$.

Zadanie 4. *Pokazać, że w każdym n-elementowym zbiorze liczb całkowitych A istnieje niepusty podzbiór B mający sumę podzielną przez n.*

Szkic. Oznaczając elementy A przez a_i oraz $s_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$ wnioskujemy, że istnieją takie $k < j$, że $s_k \equiv_n s_j$. Wtedy $\sum_{i=k+1}^{j} a_i = s_j - s_k$ jest podzielne przez n. Wyniku nie da się poprawić na zbiory mniejszej liczności, co pokazuje $S = \{in+1 : i = 1, 2, \dots n\}$.

Zadanie 5. *Pokazać, że każda liczba n ma wielokrotność, którą można zapisać w układzie dziesiętnym wyłącznie za pomocą cyfr 0 i 1.*

Szkic. Rozpatrujemy reszty liczb składających się z samych jedynek modulo n. Dwie takie liczby muszą mieć tę samą resztę, więc ich różnica jest podzielna przez n i w zapisie nie ma innych cyfr niż 0 i 1.

Zadanie 6. *Pokazać, że każda liczba niepodzielna przez 2 i 5 ma wielokrotność postaci* $1717171\dots17$.
(Nie ma znaczenia, jaki wybierzemy powtarzający się wzór.)

Szkic. Oznaczmy wybraną liczbę przez n i rozpatrzmy reszty z dzielenia kolejnych n liczb 17, 1717, 171717, $\dots$, $1717\dots17$ przez n. Albo przynajmniej jedna z nich równa jest 0, co znaczy, że odpowiednia liczba spełnia tezę, albo istnieją dwie identyczne reszty, co znaczy, że różnica odpowiadających im liczb jest podzilna przez n. Ale ta różnica jest postaci $1717\dots17 \cdot 10^k$. n i 10^k są względnie pierwsze, więc n dzieli pierwszy czynnik.

Zadanie 7. *Dla dowolnej liczby p w ciągu Fibonacciego istnieje liczba podzielna przez p.*
(W istocie pokażemy, że takich liczb jest nieskończenie wiele.)

Szkic. Ciąg reszt $F_i \pmod p$ jest okresowy. Aby to pokazać trzeba, ze względu na definicję ciągu Fibonacciego, dowieść, że w ciągu pierwszych p^2+2 reszt z wyrazów ciągu $\mod p$ pewne dwie powtarzają się w tej samej kolejności obok siebie. W konsekwencji oznacza to, że reszty pojawiają się w sposób okresowy. Ponadto zerowy wyraz jest równy 0. Zatem reszta 0 pojawia się w tym ciągu nieskończenie wiele razy, co dowodzi tezy.

Zadanie 8. *(LXIX OM) Dane są takie pięcioelementowe podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$ zbioru $S = \{1, 2, \ldots, 23\}$, że dla wszystkich $1 \leqslant i < j \leqslant k$ zbiór $A_i \cap A_j$ ma co najwyżej trzy elementy. Wykazać, że $k \leqslant 2018$.*

Szkic. Pokażemy więcej, że $k \leqslant 1771$. Załóżmy dla dowodu niewprost, że $k > 1771$. Weźmy liczbę m_1 najczęściej występującą w zbiorach A_i. Musi ona wystąpić w więcej niż $1771 \cdot 5/23 = 385$ zbiorach (w każdym zbiorze A_i jest 5 liczb, a więc zliczając krotności wystąpienia wszystkich liczb ze zbioru S dostaniemy więcej niż $1771 \cdot 5 = 23 \cdot 385$ elementów rozmieszczonych w 23 zbiorach; zatem pewna liczba musi pojawić się więcej niż 385 razy), oznaczmy je $B_1, B_2, \ldots B_l$, $l > 385$ ($m_1 \in B_i$). Niech teraz m_2 będzie najczęstszą liczbą różną od m_1 w zbiorach B_i. Występuje ona więcej niż $385 \cdot 4/22 = 70$ razy, zatem możemy wybrać spośród B_i zbiory $C_1, C_2, \ldots, C_m$, $m > 70$ ($m_1, m_2 \in C_i$). Niech teraz m_3 będzie najczęstszą liczbą różną od m_1 i m_2 w zbiorach C_i. Występuje ona więcej niż $70 \cdot 3/21 = 10$ razy, zatem możemy wybrać spośród C_i zbiory $D_1, D_2, \ldots, D_n$, $n > 10$ ($m_1, m_2, m_3 \in D_i$). Żaden element zbiorów D_i różny od m_1, m_2, m_3 nie może powtórzyć się w różnych zbiorach D_i, ale tych zbiorów jest więcej niż 10, zaś możliwych do wyboru elementów 20, sprzeczność z założeniami.

Zadanie 9. *Dane są dwa 16-kąty foremne. Kolorujemy po 7 wierzchołków każdego z nich. Pokazać, że istnieją po 4 pokolorowane wierzchołki w każdym z wielokątów będące wierzchołkami czworokątów przystających.*

Szkic. Możemy nałożyć jeden z wielokątów na drugi na 16 sposobów. Każdy wierzchołek pierwszego z nich w 7 położeniach pokrywa się z jakimś wierzchołkiem drugiego, dlatego wszystkich „pokryć” jest 49. To znaczy, że przy jednym z 16 nałożeń co najmniej 4 wierzchołki się pokrywają.

Zadanie 10. *Na płaszczyźnie danych jest $n > 5$ punktów. Dwaj gracze na przemian łączą pary niepołączonych punktów odcinkami swoich kolorów. Przegrywa ten, który połączy trzy punkty trzema odcinkami (utworzy trójkąt swojego koloru). Pokazać, że gra nie może zakończyć się remisem.*

Szkic. Załóżmy, że gra skończyła się remisem.
Wyróżnijmy jeden z punktów i zauważmy, że wychodzi z niego co najmniej 5 odcinków, a zatem co najmniej 3 spośród nich są tego samego koloru K. Jeśli którykolwiek odcinek łączący końce tych odcinków inne od wyróżnionego jest koloru K, to mamy trójkąt koloru K. Natomiast w innej sytuacji jest trójkąt drugiego koloru. to oznacza, że któryś z graczy musiał przegrać.

2.3. **Zadania geometryczne.**

Zadanie 11. *Pokazać, że w każdym wielokącie wypukłym mającym parzystą liczbę boków istnieje przekątna nierównoległa do żadnego z boków.*

Szkic. Niech wielokąt ma $2n$ wierzchołków. Wszystkich przekątnych jest $n(2n-3) > 2n(n-2)$. Gdyby nie było tak jak w tezie, dzieląc przekątne na zbiory równoległych do kolejnych boków, mielibyśmy więcej niż $(n-2)$ przekątnych równoległych do jednego boku. Ale to oznacza, że zliczając wierzchołki będące końcami tych przekątnych, boku do którego są równoległe oraz co najmniej jednego wierzchołka „po drugiej stronie” wielokąta, dostaniemy, że wszystkich wierzchołków jest co najmniej $2(n-1)+2+1 > 2n$, sprzeczność.

Zadanie 12. *(XLI Olimpiada Matematyczna) W kwadracie jednostkowym umieszczono trójkąt tak, że nie zawiera on środka kwadratu. Pokazać, że pewien bok trójkąta ma długość mniejszą niż 1.*

Szkic. Przez środek kwadratu kreślimy dwie proste: równoległą do najbliższego boku trójkąta oraz prostopadłą do niej. Dzielą one kwadrat na 4 czworokąty (lub trójkąty), przy czym w dwa z nich nie mogą zawierać wierzchołków trójkąta, a więc w jednym z nich muszą znaleźć się co najmniej 2 wierzchołki trójkąta. Ich odległość nie jest większa niż długości boków oraz przekątnych czworokąta, a ta nie przekracza 1.

Zadanie 13. *W kwadracie jednostkowym umieszczono 51 punktów. Pokazać, że pewne trzy z nich tworzą trójkąt (być może zdegenerowany do odcinka) o polu nie większym niż $\frac{1}{50}$.*

Szkic. Podzielmy kwadrat na 25 kwadratów. W jednym z nich są co najmniej 3 punkty. Teza wynika stąd, że trójkąt wpisany w prostokąt ma pole co najwyżej równe połowie pola prostokąta.

Zadanie 14. *Spośród 7 odcinków o długościach pomiędzy 1 a 10 można wybrać takie 3, które tworzą trójkąt.*

Szkic. Dzielimy odcinki na trzy podzbiory o długościach w przedziałach $[1,2)$, $[2,4)$, $[4,10]$. W jednym z tych zbiorów muszą być 3 odcinki. Jeśli w pierwszym lub drugim, to koniec. Jeśli w trzecim są więcej niż 3 odcinki, to przynajmniej 3 z nich tworzą trójkąt. Zatem pozostaje układ (2,2,3). Jeśli istnieją 2 odcinki z $[2,3)$, to tworzą trójkąt z dowolnym odcinkiem z $[1,2)$. Jeśli istnieje odcinek z $[3,4)$ oraz dwa odcinki z $[4,10]$ różniące się mniej niż o 3, to tworzą one trójkąt. Natomiast jeśli odcinki z $[4,10)$ różnią się o co najmniej 3, to ich długości muszą wynosić $4, 7, 10$ więc pozwalają stworzyć trójkąt.

2.4. **Zadania z analizy.**

Zadanie 15. *Z ciągu zawierającego n^2+1 wyrazów można wybrać monotoniczny podciąg $n+1$ wyrazów.*

Szkic. Utworzymy ciąg kolumn złożonych z elementów ciągu. Wstawmy pierwszy element w pierwszej kolumnie. Każdy kolejny umieszczamy w pierwszej kolumnie, w której jest on nie mniejszy, niż najwyżej położony już w niej element. Jeśli żadna kolumna nie spełnia tego warunku, rozpoczynamy nową. W ten sposób dostajemy układ kolumn o tej własności, że elementy każdej z osobna są ułożone słabo rosnąco, natomiast wierzchnie elementy wszystkich – silnie malejąco. Z zasady szufladkowej pewna kolumna ma co najmniej $n+1$ elementów, lub jest co najmniej $n+1$ kolumn.
Zadanie można uogólnić na $nm+1$ liczb. Wtedy istnieje ciąg rosnący długości $n+1$ lub malejący długości $m+1$.

Zadanie 16. *Spośród dowolnych 9 różnych liczb rzeczywistych można wybrać dwie a, b takie, że $0 < \frac{a-b}{1+ab} < \sqrt{2}-1$.*

Szkic. Niech a_i będą danymi liczbami, zaś $x_i = \mathrm{arctg} a_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Z zasady szufladkowej istnieją i, j takie, że $x_i > x_j$ należą do przedziału długości $\frac{\pi}{8}$. Stąd $0 < \mathrm{tg}(x_i - x_j) = \frac{a_i - a_j}{1+a_i a_j} < \mathrm{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-1$.

Zadanie 17. *Każda liczba wymierna o nieskończonym rozwinięciu dziesiętnym ma to rozwinięcie okresowe od pewnego miejsca.*

Szkic. Wynika ze schematu dzielenia pisemnego: pewna reszta pojawiająca się w dzieleniu od momentu, kiedy „dopisujemy" tylko zera musi się powtórzyć i od tego momentu ciąg cyfr rozwinięcia dziesiętnego będzie się powtarzał cyklicznie.

Zadanie 18. *Jeśli x i y są niewspółmierne, to ciąg $nx \pmod{y}$ jest gęsty w odcinku $[0, y]$.*

Szkic. Standardowy dowód[1].

Zadanie 19. *Z ciągu liczbowego $(\mathrm{tg}\ n)$ można wybrać podciąg zbieżny do dowolnej liczby rzeczywistej x.*

Szkic. Wybieramy ciąg liczb naturalnych (n_k) taki, że $n_k \mod \pi \to \mathrm{arctg}\ x$ (możliwość tego wynika z poprzedniego zadania). Oczywiście $\mathrm{tg}\ n_k \to x$.

3. Uogólnienie

Twierdzenie 2 (Wersja geometryczna). *Jeśli zbiór X jest sumą n zbiorów X_i $(i = 1, \ldots, n)$ o miarach (czyli licznościach, długościach, polach, objętościach) m_i oraz miara X jest mniejsza niż $\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{k}$, to istnieje element należący do przynajmniej $k+1$ ze zbiorów X_i.*

Zadanie 20. *Pokazać, że każda figura o powierzchni większej niż 1 zawiera dwa takie punkty, że wektor pomiędzy nimi ma współrzędne całkowite.*

Szkic. Umieśćmy figurę na pokratkowanym papierze. Potnijmy na kratki i złóżmy je jedna na drugiej. Figura dzieli się na części o łącznej powierzchni większej niż 1 ułożone w kwadracie o polu 1, czyli zajmują w nim powierzchnię nie większą niż 1. Zatem dwie z tych części mają niepuste przecięcie. Punkty z tego przecięcia w oryginalnym położeniu mają współrzędne różniące się liczbami całkowitymi.

Uwaga. Interesujący jest problem inny, który jednakowoż z zasadą szufladkową jest luźno związany:
Figurę o powierzchni mniejszej niż 1 można tak umieścić w układzie współrzędnych, że żaden jej punkt nie ma obu współrzędnych całkowitych.

Zadanie 21. *Na zamkniętej drodze znajduje się pewna liczba stacji benzynowych dysponujących ograniczoną ilością paliwa. Wiadomo, że paliwo ze wszystkich stacji wystarczyłoby na pokonanie całej drogi. Pokazać, że dla każdego kierunku ruchu można wybrać taką stację, że zaczynając od niej można pokonać całą drogę dotankowując po drodze paliwo.*

Szkic. Dla każdej stacji o numerze i znajdujemy zbiór A_i punktów, do których można dotrzeć w wybranym kierunku dysponując zapasem paliwa z tej stacji. Z zasady szufladkowej wynika, że A_i nie mogą być wszystkie parami rozłączne, co pozwala dowieść krok indukcyjny redukując liczbę stacji przez przeniesienie paliwa z jednej z nich do stacji wcześniejszej.

[1] Można znaleźć w wielu miejscach. Zainteresowanym mogę podać odnośniki mailem.

Zadanie 22. *Jaka jest odpowiedź w zadaniu 2 dla wież i hetmanów?*

Zadanie 23. *Na okręgu napisano 101 dodatnich liczb całkowitych o sumie 300. Pokazać, że można wyciąć łuk okręgu w ten sposób, że suma liczb na nim równa jest 200.*

Zadanie 24. *Jaka jest maksymalna liczebność podzbioru* $S \subset \{1, 2, 3, \ldots, 25\}$ *o tej własności, że dla dowolnych* $a, b \in S$ *iloczyn* ab *nie jest kwadratem liczby całkowitej?*

Zadanie 25. *Dla dowolnego* n *istnieje takie* m*, że żadna z liczb* $k^3 - k + m$ *nie jest, dla całkowitego* k*, podzielna przez* n*.*

Zadanie 26. *Pokazać, że mając daną dowolny ciąg 7 cyfr można w ten sposób usunąć z niego pewną liczbę (możliwe, że równą 0) cyfr z początku i z końca, aby pozostałe cyfry tworzyły liczbę podzielną przez 7.*

Zadanie 27. *Niech* $x_1, \ldots, x_n \subset [-1, 1]$*. Pokazać, że istnieją takie liczby* $s_i \in \{-1, 0, 1\}$ *nie wszystkie równe 0, że*

$$|s_1 x_1 + \ldots + s_n x_n| \leqslant \frac{n}{2^n - 1}.$$

Zadanie 28. *Niech* $A \subset \{1, 2, 3, \ldots 30\}$ *będzie zbiorem mającym co najmniej 11 elementów. Pokazać, że istnieje taki niepusty zbiór* $B \subset A$*, iloczyn którego wszystkich elementów jest kwadratem liczby całkowitej.*

Zadanie 29. *Niech* $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$*. Pokazać, że* $\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n}(a_i - a_j)$ *jest liczbą podzielną przez* $n!$*.*

Zadanie 30. *Dane są dwa ciągi* $(a_i)_{i=1}^{2n}$ *i* $(b_i)_{i=1}^{2n}$ *o wartościach całkowitych ze zbioru* $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$*. Pokazać, że istnieją niepuste spójne podciągi danych ciągów o identycznych sumach.*

Zadanie 31. *Niech zbiór* $A \subset \{1, 2, \ldots, 99\}$ *ma 10 elementów. Pokazać, że istnieją dwa rozłączne i niepuste podzbiory* A*, których sumy elementów są równe.*

Zadanie 32. *Zbiór* A *składa się z 2018 liczb naturalnych niemających dzielników pierwszych większych od 23. Pokazać, że w* A *są 4 takie liczby, których iloczyn jest czwartą potęgą liczby całkowitej.*

Zadanie 33. *Na płaszczyźnie danych jest* n *punktów. Pokazać, że pewne trzy z nich wyznaczają kąt o mierze nie większej niż* $\frac{\pi}{n}$*.*

Zadanie 34. *Pokazać, że jeśli na sferze znajduje się 5 punktów, to przynajmniej 4 z nich leżą na jednej z półsfer.*

Zadanie 35. *Prostokąt o wymiarach* 4×40 *pokolorowano używając 4 kolorów. Pokazać, że istnieją w nim 4 punkty o tym samym kolorze będące wierzchołkami prostokąta o całkowitych długościach krawędzi.*

Zadanie 36. *(Putnam[2]) Dane są trzy ciągi* $(a_i)_{i=1}^{n}$*,* $(b_i)_{i=1}^{n}$ *i* $(c_i)_{i=1}^{n}$ *liczb całkowitych. Dla dowolnego* k *przynajmniej jedna z liczb* a_k*,* b_k *i* c_k *jest nieparzysta. Pokazać, że można znaleźć takie liczby całkowite* r, s, t*, że spośród liczb* $ra_i + sb_i + tc_i$ *co najmniej* $\frac{4n}{7}$ *jest nieparzysta.*

Zadanie 37. *W* $\mathbb{R}^n$ *(*$n \geqslant 3$*) wybrano zbiór* B *składający się z więcej niż* $\frac{2^{n+1}}{n}$ *punktów, których wszystkie współrzędne mają wartości* ± 1*. Pokazać, że w zbiorze* B *istnieją trzy punkty tworzące trójkąt równoboczny.*

[2]Zadanie to oraz kolejne pochodzi ze studenckich zawodów matematycznych im. W. L. Putnama. Wiele problemów z nich jest w zasięgu uczniów szkół. Strony w języku angielskim zawierające informacje o konkursie można dość łatwo znaleźć w sieci wyszukując słowo „Putnam".